SOLUCIONES NUMÉRICAS DE ECUACIONES LINEALES Y PROBLEMAS ASOCIADOS
Tema: Eliminación Gaussiana

Ing. Oscar Nuñez Venegas

Carl Friedrich Gauss, conocido como el principe de los matemáticos, fue un astrónomo y matemático alemán (1777-1855). Fue director del Observatorio de Göttingen y desarrolló nuevas técnicas para calcular la órbita de los asteroides.
Publicó, entre otras obras: Disquisiciones Arithmeticae, sobre la teoría de los números. Propuso el método de mínimos cuadrados y la solución de las ecuaciones binomiales. Contribuyó notablemente a los estudios de geometría no euclidiana e introdujo la curva de error Gaussiana.
Gauss es considerado el fundador de la teoría matemática de la electricidad y de la teoría del análisis real.
A continuación se presenta un Programa, que obtiene la solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales basado en el método Gauss.

Los métodos se describen a un conjunto de n ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$, que se expresa de la forma:

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \quad + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \quad + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + a_{n3} x_3 + \quad + a_{nn.} x_n = b_n \end{array} \qquad \text{(I)}$$

En donde los n^2 coeficientes, los a_{ij} y los n miembros del lado derecho están dados.
Las ecuaciones **(I)** se pueden escribir en forma matricial como sigue:

AX=B

En donde, $A = [a_{ij} : i]_n$

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{array} \quad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{vmatrix} \qquad \text{(II)}$$

i=índice de filas j=índice de columnas

El problema de determinación de los valores: $x_1, x_2, \dots, x_n$, que satisfagan (I) se puede resolver numéricamente a partir de la forma (I) o de la forma (II), mediante técnicas de inversión matricial. En cualquier caso los métodos son directos (o sea, de una sola vez) o de procedimientos iterativos (repetidos).
Supóngase que los b_i no son todos ceros y que el determinante de $A \neq 0$.
Entonces la ecuación (I) tiene una sola solución.

MÉTODO DIRECTO DE RESOLUCIÓN DE ECUACIÓN (I)

REDUCCIÓN DE GAUSS.- Este método es el más simple y práctico para resolver la ecuación (I). Consiste en dividir la primera ecuación entre aI_1. Si $aI_1 = 0$, se debe ordenar la ecuación y utilizar el resultado para eliminar x_1 de todas las ecuaciones sucesivas
.
A continuación, la segunda ecuación modificada se divide entre a'_{22}. Si $a'_{22} = 0$, será necesario volver a numerar la ecuación y/o variables y se usa la ecuación resultante para eliminar la variable de las ecuaciones sucesivas. Esta eliminación se realiza n veces. El resultado es de la forma «triangular»

$$\begin{array}{l} x_1 + a'_{12} x_2 + a'_{13} x_3 + \dots + a'_{1n} x_n = b'_1 \\ \qquad x_2 + a'_{23} x_3 + \dots + a'_{2n} x_n = b'_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad\qquad x_{n-1} + \dots + a'_{n-1} x_n = b'_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad x_n = b'_n \end{array}$$

en donde los a'_{ij} y b'_j representan los valores numéricos específicos obtenidos mediante el procedimiento anterior.

A continuación se obtiene la solución yendo hacia atrás, a partir de la última ecuación.

Ejemplo para el caso que el Programa simula el resultado de una matriz de 10 x 10.

La reducción de Gauss, es el procedimiento básico del que se desarrollaron todos los procedimientos directos. Su desventaja es la notación de las nuevas disposiciones y la posibilidad de que se comentan errores importantes. Una modificación en la que se utiliza la ecuación K, en la etapa K, para eliminar X_K de la precedente y la siguiente, da una forma diagonal final de la disposición, luego, la solución se obtiene inmediatamente. Este procedimiento recibe el nombre de la reducción de Gauss-Jordan.

Otra modificación denominada reducción de Gauss-Doolittle, es específicamente para ecuaciones simétricas.

Generalmente los problemas de este tipo son programados en lenguajes denominados científicos, tales como: Fortran, Pascal, C,C++.

Cuando hay necesidad de incorporar una rutina basada en este tipo de algoritmos dentro de un sistema comercial, se invoca a rutinas elaboradas en los lenguajes antes mencionados.

Sin embargo, actualmente encontramos que el lenguaje Java permite fácilmente programar las soluciones basadas en algoritmos matemáticos, un ejemplo de ello lo encontramos a continuación:

```
/* Programa creado en VisualAgeforJava for Windows versión 2.0 */
public static void main(String args[]) {
	System.out.println("	Tema: Eliminación Gaussiana");
	System.out.println("	Autor: Ing.Oscar Núñez Venegas"+"\n");
	System.out.print("	Ingrese el Orden de la Matriz = ");
	int n=Math2.leerNumeroEntero();
	System.out.println(n+"\n");
	n=n+2;
	float w[][] = new float[n][n];
	float x[] = new float[n];
	float aux=1, sum;
	int i,j,k,m,cent;
	n=n-2;
	System.out.print("Ingrese "+n+" Columnas y la Constante en la misma línea ");
	System.out.println("\n");
	for(i=1;i<=n;i++){
		System.out.print("Fila "+i+" = ");
		for(j=1;j<=n+1;j++){
			w[i][j] =Math2.leerNumeroRealSimple();
			System.out.print(w[i][j]+"  ");
			}
		System.out.println();
	}
	for(i=1;i<=n;i++){
		for(j=n+1;j>=i;j—)
			w[i][j]/= w[i][i];
		for(k=i+1;k<=n;k++){
			cent=0;
			for(m=i;m<=n+1;m++){
				if(cent==0){
					aux=w[k][m];
					cent=1;
				}
				w[k][m]=aux*w[i][m]-w[k][m];
			}
		}
	}
	for(i=n;i>=1;i—){
		sum=0;
```

```
            for(j=i;j<n;j++)
                sum+=w[i][j+1]*x[j+1];
            x[i]=w[i][n+1]-sum;
        }
        System.out.println(" RESULTADOS :");
        for(i=1;i<=n;i++)
            System.out.println("  x["+i+"] = "+x[i]);
}
```

```
        Tema: Eliminación Gaussiana

       Autor: Ing.Oscar Núñez Venegas

    Ingrese el Orden de la Matriz = 10

Ingrese 10 Columnas y la Constante en la misma línea

Fila  1 = 2.0  6.0  3.0  5.0 -9.0 -5.0  6.0  2.0  4.0   8.0  4.0
Fila  2 = 2.5  3.6  6.0  5.0  9.0  5.0 -2.3  6.0  5.0   1.0  6.0
Fila  3 = 5.0  9.0  9.4  3.5 -9.0  2.0  5.0  4.0  6.0   5.0  6.0
Fila  4 = 2.0 -6.0 -5.0 -2.0  9.0  5.0  3.0  0.2  5.0   0.5  6.2
Fila  5 = 6.0  2.0  5.0  4.0  9.0 -5.0  6.0 -9.0 -5.0  5.0  8.0
Fila  6 = 1.0  7.0  2.5  8.5  6.5  9.1  5.0   2.6  5.8  9.5  6.0
Fila  7 = 2.5  4.0 -1.2  3.2  6.2  2.0   5.0   6.0 -5.0 -4.0  6.0
Fila  8 = 2.0  8.0  2.8  5.9  6.0  2.5  1.6   2.4   9.5 3.0  2.0
Fila  9 = 1.0  6.0  5.0  9.0  5.0  4.0  2.0   1.0   6.0 1.0  2.5
Fila10 = 1.6  5.8  9.2  2.1 -2.0 -0.3  3.0   6.0 -5.0  8.0 -4.0

RESULTADOS :

   x[1] =   3.2225213
   x[2] =  -0.61622137
   x[3] =  -0.94619393
   x[4] =   1.2760377
   x[5] =  -0.42179728
   x[6] =   0.20083156
   x[7] =  -0.8567934
   x[8] =   0.17529291
   x[9] =  -0.16331148
  x[10] =   0.045260184
```